

Revista de Investigación y Desarrollo Pesquero

Volumen 1 - N° 1 - Noviembre 1979

Director: Cap. de Navío (RE) Alberto Oscar CASELLAS
Jefe de Información Científica: Dr. Héctor E. PERALTA
Jefe de Publicaciones Científicas: Rodolfo Luis DESPLATS

UN MODELO ESTOCÁSTICO DE PESQUERÍAS

CARLOS E. D'ATELLIS *

CARLOS G. D. GREGORIO **

SUMMARY

Based on the Schaefer production model, an stochastic model is described, that is a model in which noises perturbing biomass and measurements are considered, serving to describe random variations in mortality and recruitment as well as some inaccuracies in measurements taken. The model is discrete, linear and adaptable, and the parameters, biomass and noises intensities are reestimated with each new measurement obtained. The problem of regulation is solved, on the basis of the model described, through fishing effort that should be applied to keep biomass close to equilibrium. Computer effected simulations are presented.

1. Introducción

En [1] Beverton y Holt y en [2] Ricker se han estudiado modelos detallados aplicables a pesquerías de las cuales se dispone de datos sobre la mortalidad y crecimiento. Existen otros modelos más simples propuestos por Schaefer [3, 4], Pella y Tomlinson [5] y Fox [6] los cuales pueden utilizarse con menor información y cuando desea realizarse una regulación, es decir, mantener la biomasa en un entorno del estado de equilibrio.

Estos modelos simples calculan los efectos de la pesca en la población, para estimar la relación entre la magnitud del "stock" sostenible, los límites de captura, el esfuerzo a aplicar, y en algunos casos, la edad y talla de la captura permitida. ([cf. 2, 7, 8, 9] Ricker, Dickie, Gulland, Schaefer y Beverton).

En este trabajo utilizaremos el modelo desarrollado por Schaefer [10]. La variable básica en

* Instituto Argentino de Matemática.

** Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo Pesquero.

este modelo es la biomasa P , la cual se considera incrementada por el reclutamiento y por el crecimiento individual, y disminuida por la mortalidad natural y por la pesca.

La biomasa P es desconocida y sólo puede ser determinada a través de la captura; la relación entre ambas está dada por la siguiente expresión:

$$C = qfP$$

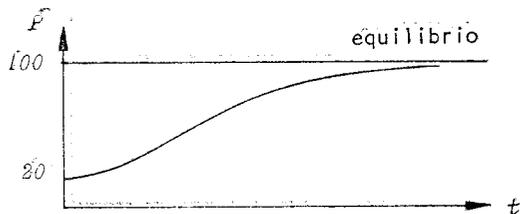
donde q es el coeficiente de capturabilidad y f es el esfuerzo pesquero. No obstante C incluye un error de observación que trataremos más adelante.

El modelo de Schaefer está dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = bP - aP^2 - qfP$$

donde b es la tasa de crecimiento y a la de mortalidad.

Tanto en este modelo como en las variantes citadas no se contempla ninguna variación ni oscilación, como se observa en la figura 1, en la que se muestra el crecimiento de la biomasa P según el modelo $\dot{P} = 100P - P^2$ tomando como valor inicial el 20 % del nivel de equilibrio.



(Fig. 1)

Este comportamiento monótono significa un comportamiento irreal de la biomasa en el modelo ([cf. 11, p. 940] Walter).

El modelo aquí propuesto es de naturaleza estocástica, dado que intervienen perturbaciones aleatorias en el sistema y en las mediciones, consideradas como ruidos actuantes en las ecuaciones cuyas intensidades deberán determinarse basándose en mediciones realizadas previamente, o sea basándose en la historia del sistema.

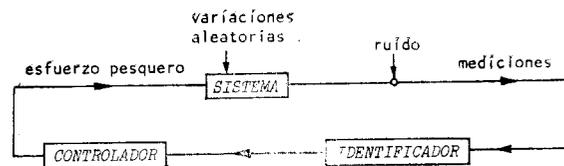
Todos los modelos hasta aquí considerados se definen como continuos en el tiempo (i.e. ecuaciones diferenciales), pero la acción sobre el sistema (esfuerzo) como las mediciones efectuadas (provenientes de muestreo) constituyen un conjunto discreto; de esta manera consideramos un modelo discreto, es decir, dado por una ecuación en diferencias. Schnute [12] utilizó también un mo-

delo discreto pero en un contexto distinto al aquí considerado.

A pesar de que el modelo de Schaefer es no lineal, por tratarse de un problema de regulación, emplearemos un modelo lineal que represente la situación en un entorno del estado de equilibrio, en principio desconocido.

La utilización de un modelo con las características establecidas permitirá el diseño de políticas pesqueras óptimas, con la ventaja de que con el planteo formulado las decisiones sobre el esfuerzo pesquero son tomadas basándose en un modelo que se va adaptando a la realidad con cada nueva medición realizada, es decir un modelo adaptativo ([cf. 13] Walters y Hilborn).

El esquema general es el que muestra la siguiente figura:



(Fig. 2)

En el bloque "identificador" se incluyen las estimaciones de la biomasa, los parámetros del sistema, el punto de equilibrio y las intensidades de los ruidos que intervienen en el sistema y sobre las mediciones. En el bloque "controlador" se calcula el esfuerzo pesquero óptimo.

2. Estimación de la biomasa y de los parámetros

Consideramos la dinámica de la población mediante el sistema lineal, discreto y estocástico:

$$p_{k+1} = \alpha p_k + \beta u_k + \xi_k$$

$$y_k = p_k + \zeta_k$$

donde

- p_k : desviación de la biomasa con respecto al equilibrio
- u_k : esfuerzo pesquero
- ξ_k : ruido blanco gaussiano
- ζ_k : ruido blanco gaussiano que afecta las mediciones
- α, β : parámetros desconocidos, sobre los que se hace la hipótesis de que pertenecen a un par de intervalos dados.

El estado inicial p_0 se supone gaussiano con valor medio p_0 y varianza σ_0^2 , además se supone $P(y_k|p_k) = N(p_k, \sigma_\xi^2)$ y $P(p_k|\alpha, \beta, p_{k-1}) = N(\alpha p_{k-1} + \beta u_{k-1}, \sigma_\xi^2)$; entonces los estimadores de máxima verosimilitud $\hat{p}_k, \hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ se obtienen minimizando la siguiente función: ([cf. 14] Bar-Shalom).

$$L_n(p_1, \dots, p_n, \alpha, \beta) = \\ = (2\pi\sigma_\xi^2)^{-n-1} \sigma_0^{-n-1} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - p_k)^2}{2\sigma_\xi^2} - \sum_{k=1}^n \frac{(p_k - \alpha p_{k-1} - \beta u_{k-1})^2}{2\sigma_\xi^2} - \frac{(p_0 - p_0)^2}{2\sigma_0^2} \right\}$$

Las estimaciones deseadas satisfacen $L_n(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ es mínimo, y derivando se obtiene el sistema de ecuaciones de verosimilitud que representaremos por

$$B_n \cdot z_n = q_n \quad (2.1)$$

$$D_n \cdot x = r_n \quad (2.2)$$

donde $z_n^t = (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_n)$ y $x^t = (\alpha \ \beta)$.

La solución al problema está dada por el siguiente mecanismo iterativo:

1) Se fijan límites razonables para la variación de los parámetros, y se toman dentro de ellos valores iniciales; se resuelve (2.1), obteniendo así $\hat{z}_n^{(1)}$.

2) Usando $\hat{z}_n^{(1)}$ se resuelve (2.2). Sea $x^{(1)}$ la solución. Entonces la nueva estimación $\hat{x}^{(1)}$ de los parámetros es $x^{(1)}$ si están dentro de los límites fijados, y en caso contrario, se utiliza como estimación el valor más próximo a $x^{(1)}$ dentro de los límites considerados.

3) Reemplazando $\hat{x}^{(1)}$ en (2.1) se obtiene $z_n^{(2)}$.

4) Calcular la nueva estimación de x como en 2) y así sucesivamente.

5) Las iteraciones finalizan cuando

$$\frac{\|\hat{x}^{(N)} - \hat{x}^{(N-1)}\|}{\|\hat{x}^{(N)}\|} \leq \Delta$$

donde Δ es un número preestablecido.

Cuando se decide que los parámetros son suficientemente buenos, se puede utilizar un filtro de Kalman [15] para la estimación de los estados, tomando como verdaderos los parámetros calculados. El método tiene la ventaja de que permite estimar la biomasa desde que se comienza el estudio, y que su convergencia a los valores reales es suficientemente rápida (ver § 6, gráficos B1 a B6).

3. Análisis de los efectos causados en las estimaciones por valores erróneos de las covarianzas

Se estudia en esta sección el efecto que produce en la salida de un filtro de Kalman, la utilización de covarianzas erróneas tanto en los ruidos del sistema y de las mediciones, como en la de la condición inicial.

Emplearemos el sistema discreto utilizado anteriormente, suponiendo que las covarianzas reales de los ruidos del sistema y de las observaciones son $Q = 1, R = 1$, respectivamente. La covarianza de la condición inicial Σ_0 , la dejaremos fija ($\Sigma_0 = 0,5$) por ahora, para analizar los efectos producidos por variaciones en Q y en R solamente.

Bajo las condiciones anteriores, el filtro óptimo da la siguiente covarianza de error de estimación Σ_0

$$\begin{array}{ccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \Sigma & 0,5 & 1,12 & 1,19 & 1,20 & 1,20 \end{array} \quad (3.1)$$

Naturalmente estos valores corresponden a las intensidades de los ruidos utilizados, pero si reducimos ambas a 0,1 resulta

$$\begin{array}{ccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \Sigma & 0,5 & 0,13 & 0,12 & 0,12 & 0,12 \end{array} \quad (3.2)$$

es decir que se ha reducido también en un factor 10 la covarianza del error.

Tomaremos como óptimo el comportamiento descrito en la tabla (3.1), es decir con $Q = R = 1$. Para estudiar los efectos producidos por la utilización de Q y R incorrectas, se calcula: 1) la covarianza del error de la estimación dada por el filtro cuando se usan los valores erróneos de Q y R . 2) la covarianza del error real, basado en el conocimiento de las verdaderas Q y R y en el hecho de que tanto la ganancia como la matriz de transición del filtro sufren una desviación de sus valores óptimos debido justamente a los errores cometidos ([cf. 16] Heffes).

En las tablas C1 a C10 (ver §6) se muestran las salidas correspondientes a diez casos distintos, en los que se mantiene fijo $\Sigma_0 = 0,5$ y se varía Q y R .

Las conclusiones que se pueden obtener de las mismas son las siguientes: (a) el valor estacionario Σ_a (covarianza real) es significativamente próximo al valor óptimo en todos los casos considerados. (b) si las intensidades de los ruidos son menores que las reales, Σ_c (covarianza calculada) toma valores menores que los reales Σ_a . (c) por el contrario, mayores intensidades que las reales conducen a que $\Sigma_c > \Sigma_a$.

Lo importante de estas dos últimas conclusiones es que los valores estacionarios resultan menores que Σ_a en el caso (b) y mayores en el caso (c); es decir, que la diferencia no disminuye en estos modelos, comportamiento que los presenta como diferentes al ejemplo de Heffes [16].

Es importante entonces el problema de identificar correctamente tanto Q (intensidades del ruido sobre el sistema) como R (intensidad del ruido sobre las mediciones). De esto nos ocuparemos en § 4.

Influye más el error sobre Q que sobre R en la aproximación de Σ_c a Σ_a ; así se obtienen resultados más aproximados cometiendo un -10 % de error en Q y -60 % en R , que con -60 % en Q y -10 % en R (tablas C6 y C10); mejor con 10 % en Q y 60 % en R que con 60 % en Q y 10 % en R (tablas C7 y C8); mejor con 0 % en Q y -90 % en R que con -90 % en Q y 0 % en R (tablas C4 y C5).

Hemos analizado hasta aquí las diferencias que se aprecian cuando se cometen errores en las intensidades de los ruidos del sistema y de las mediciones, pero manteniendo las características del estado inicial constante. En las tablas C11 a C18 se muestran algunos casos en los que variamos la covarianza de la condición inicial. Se infiere de ellas que no es mucha su importancia en la diferencia $\Sigma_a - \Sigma_c$; en efecto, una diferencia de $\pm 60\%$ se hace casi nula rápidamente si Q y R están bien identificadas (tablas C14 y C15). La misma conclusión se obtiene comparando las tablas C16 con C17, y C13 con C18.

4. Identificación de las intensidades de los ruidos y filtrado adaptativo

Consideramos el sistema con las siguientes constantes

$$p_{k+1} = 0,6065 p_k - 3,5415 u_k + \xi_k$$

$$y_k = p_k + \zeta_k$$

donde ξ_k, ζ_k son ruidos blancos con intensidad 1.

Para calcular el filtro supongamos en cambio que las intensidades de ξ_k y ζ_k toman distintos valores, ambos diferentes de 1.

No es importante considerar el término en u_k puesto que lo único que agrega es el mismo término en la ecuación (4.1), de manera que supondremos que el esfuerzo pesquero no varía de su referencia en todo el período considerado.

Supondremos que el estado inicial es aleatorio con media nula y varianza Σ_0 . Si K es el valor es-

tacionario de la ganancia, las ecuaciones del filtro son

$$\hat{p}_k = 0$$

$$\hat{p}_{k+1} = 0,6065 \hat{p}_k + K (y_k - \hat{p}_k) \quad (4.1)$$

y el término

$$v_k = y_k - \hat{p}_k$$

es la innovación en cada paso.

$$\hat{C}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N v_i^2$$

$$\hat{C}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i v_{i-1}$$

las estimaciones de Q y R están dadas por ([17] Mehra)

$$A = 0,6065$$

$$\hat{M} = K C_0 + \frac{1}{A} C_1$$

$$\hat{R} = \hat{C}_0 - \hat{M}$$

$$\hat{Q} = \hat{M} - A^2 (1 - K)^2 \hat{M} - A^2 K^2 \hat{R}$$

Los valores de Q y R se eligen de acuerdo al siguiente criterio: la sucesión de innovación v_k debe ser blanca, lo cual es una condición necesaria y suficiente para la optimalidad del filtro ([18] Kailath). De esto nos ocuparemos en el párrafo siguiente.

Se observó que las estimaciones obtenidas dependen de los valores iniciales fijados.

5. "Test" para decidir sobre la optimalidad del filtro

Como fue establecido en el párrafo precedente, el criterio para decidir sobre la optimalidad del estimador, es que sea una sucesión "blanca" el proceso de innovación. El método que utilizaremos para verificar si es o no blanca dicha sucesión es el siguiente:

- calcular la función de autocorrelación;
- calcular el espectro de potencia;
- establecer un intervalo de confianza, y verificar con él si el espectro es suficientemente plano.

Dado que no es posible, por razones de cálculo, utilizar un intervalo muy grande de definición de la función de autocorrelación, se presenta el problema de determinar la transformada de Fourier de una función en base al conocimiento de la misma en un intervalo $[-\tau, \tau]$. Para solucionar dicho problema usaremos el método "de las ventanas", que consiste en elegir una función par $w(t)$ tal que $w(t) = 0$ para $|t| > \tau$, cuya transformada de Fourier

$W(\omega)$ esté suficientemente concentrada en el origen y que verifique

$$w(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega = 1.$$

Existen distintas funciones ventanas para resolver el problema; por ejemplo, la de [19] Bartlett y la de [20] Papoulis.

6. Simulación

Consideremos el modelo de Schaefer con los siguientes parámetros (ver Walter [21]).

$$\dot{p} = p - 0,01 p^2 - 0,1 fp$$

y supongamos el punto de equilibrio

$$\begin{aligned} f_0 &= 6 \\ U_0 &= 4,0 \end{aligned}$$

donde f indica el esfuerzo pesquero y U la captura por unidad de esfuerzo.

De lo anterior resulta que el punto de equilibrio para la biomasa es

$$p_0 = \frac{U_0}{q} = 40.$$

Dado que se trata de un problema de regulación y por lo tanto se trabaja en un entorno del punto

de equilibrio, se linealiza la ecuación y se discretiza. De este proceso resulta

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= 0,6065 p_k - 3,5415 u_k \\ y_k &= p_k \end{aligned}$$

donde p_k y u_k son las desviaciones de la biomasa y del esfuerzo pesquero con respecto al punto de equilibrio preestablecido.

Definimos el siguiente costo asociado a la operación

$$J = \sum_k [p_k^2 + 0,1 u_k^2],$$

y calculamos el esfuerzo pesquero u_k en los distintos períodos de tal manera que minimice el costo J .

Aplicando la teoría de regulación óptima ([cf. 22] Kalman) obtenemos los resultados que se consignan en las tablas A1 a A3.

Si el esfuerzo pesquero óptimo calculado produce una rápida regulación del sistema, y si los porcentajes de variación del esfuerzo son demasiado altos, es decir si no se dispone de equipo para incrementarlo en los porcentajes hallados, o si se considera excesiva la capacidad dejada ociosa si se disminuye de acuerdo con los porcentajes negativos calculados, entonces se puede corregir el costo J asociado al proceso, modificando sus coeficientes para lograr un compromiso entre la velocidad de la regulación y el monto del esfuerzo pesquero.

U(O), Y(O), F, G, SV, SW, SO, X(O)
 4.5 45.1 .8 -3 .1 .1 .1 45
 INTERVALO DE F (.4,1) INTERVALO DE G (-6,0)
 DELTA = .001

N	F	G	Z(N)	X(N)	Y(N)	U(N+1)
0	0.800	-3.000		45.000	45.100	
1	2 0.800	-3.000	16.229	11.405	11.448	4.307
2	12 0.610	-3.556	-8.328	-8.315	-8.320	-1.421
3	2 0.609	-3.553	0.034	0.023	0.084	0.006
4	2 0.609	-3.550	0.021	0.027	0.037	0.004
5	2 0.608	-3.548	0.017	-0.012	0.031	0.003

Ap. A1

U(O), Y(O), F, G, SV, SW, SO, X(O)
 4.5 45.1 .8 -3 .1 .5 .1 45
 INTERVALO DE F (.4,1) INTERVALO DE G (-6,0)
 DELTA = .001

N	F	G	Z(N)	X(N)	Y(N)	U(N+1)
0	0.800	-3.000		45.000	45.100	
1	2 0.800	-3.000	21.842	11.410	11.604	5.796
2	36 0.641	-3.611	-12.854	-13.591	-13.637	-2.274
3	2 0.640	-3.613	-0.071	-0.155	0.176	-0.013
4	2 0.638	-3.616	-0.018	-0.020	0.011	-0.003
5	2 0.636	-3.617	0.008	0.047	0.264	0.002

Ap. A2

U(O), Y(O), F, G, SV, SW, SO, X(O)
 4.5 45.1 .8 -3 .1 .5 .1 45
 INTERVALO DE F (.4,1) INTERVALO DE G (-6,0)
 DELTA = .001

N	F	G	Z(N)	X(N)	Y(N)	U(N+1)
0	0.800	-3.000		45.000	45.100	
1	2 0.800	-3.000	11.750	11.281	11.324	3.118
2	4 0.593	-3.415	-3.940	-3.965	-3.940	-0.680
3	2 0.593	-3.419	0.059	0.007	0.062	0.010
4	2 0.593	-3.419	0.170	0.161	0.177	0.029
5	2 0.593	-3.419	-0.016	-0.054	-0.017	0.003

Ap. A3

U(O), Y(O), F, G, SV, SW, SO, X(O)
 4.5 45.1 .8 -3 .1 .5 .1 45
 INTERVALO DE F (.4,1) INTERVALO DE G (-6,0)
 DELTA = .0001

N	F	G	Z(N)	X(N)	Y(N)	U(N+1)
0	0.800	-3.000		45.000	45.100	
1	2 0.800	-3.000	21.836	11.400	11.507	5.795
2	49 0.627	-3.593	-13.259	-13.610	-13.462	-2.305
3	18 0.621	-3.599	-0.122	-0.033	0.144	-0.021
4	3 0.620	-3.598	-0.000	0.066	-0.001	0.000
5	3 0.619	-3.596	0.018	0.081	0.324	0.003

Ap. A4

U(O), Y(O), F, G, SV, SW, SO, X(O)
 .116 1.4 .8 -3 .1 .1 .1 1.3
 INTERVALO DE F (.4,1) INTERVALO DE G (-6,0)
 DELTA = .0001

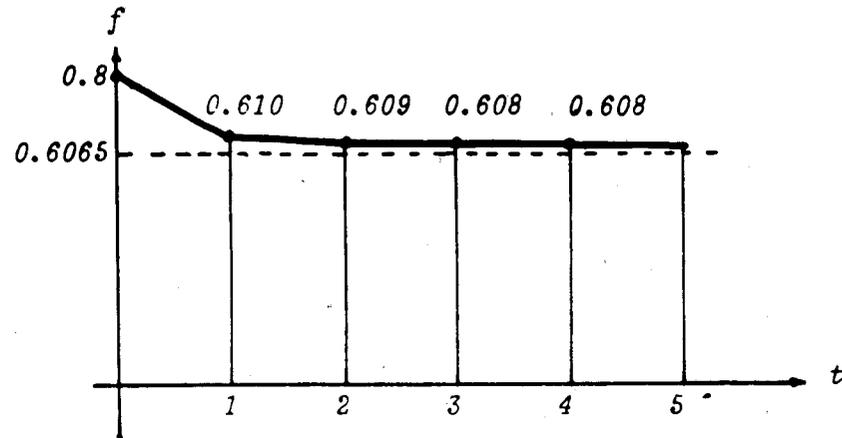
N	F	G	Z(N)	X(N)	Y(N)	U(N+1)
0	0.800	-3.000		1.300	1.400	
1	2 0.400	0.000	-0.182	-0.408	-0.363	0.115
2	14 0.565	-3.311	-0.586	-0.609	-0.586	0.112
3	5 0.575	-3.313	-0.711	-0.767	-0.711	0.111
4	6 0.602	-3.299	-0.805	-0.822	-0.808	0.102
5	5 0.613	-3.262	-0.831	-0.871	-0.832	0.143

Ap. A5

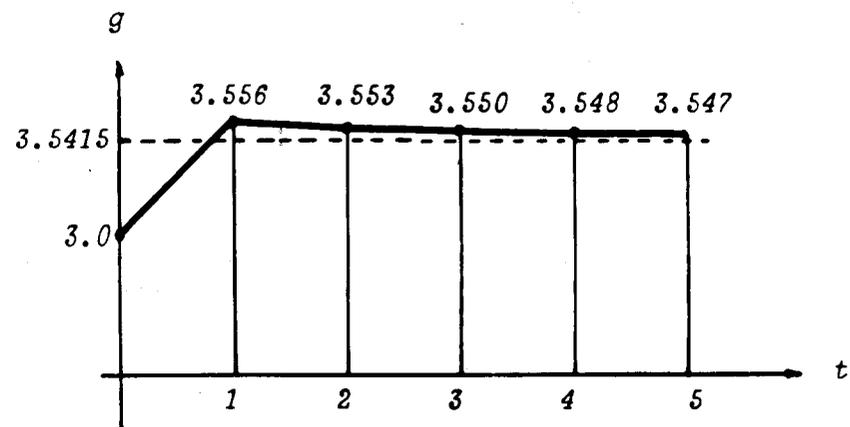
U(O), Y(O), F, G, SV, SW, SO, X(O)
 .115 1.4 .8 -3 .1 .1 .1 1.3
 INTERVALO DE F (.4,1) INTERVALO DE G (-6,0)
 DELTA = .001

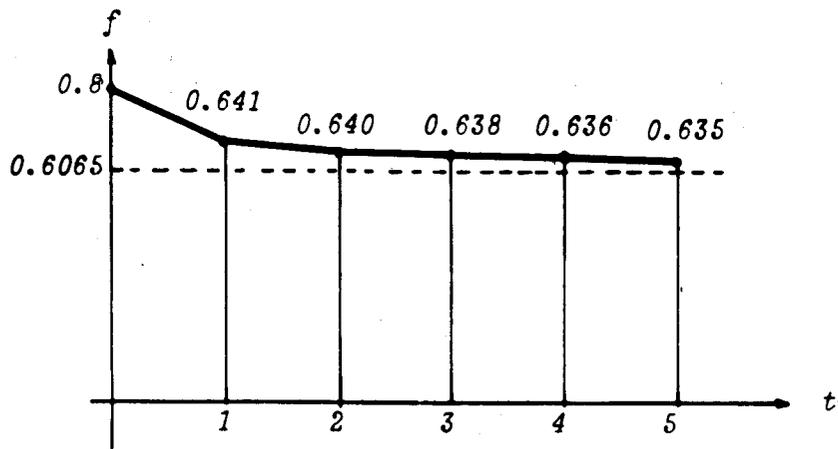
N	F	G	Z(N)	X(N)	Y(N)	U(N+1)
0	0.800	-3.000		1.300	1.400	
1	2 0.800	-3.000	0.602	0.430	0.500	0.115
2	6 0.728	-4.177	-0.116	-0.119	-0.116	0.112
3	9 0.615	-3.127	-0.390	-0.417	-0.377	0.111
4	5 0.634	-3.279	-0.627	-0.629	-0.636	0.102
5	5 0.609	-3.117	-0.665	-0.708	-0.645	0.143

Ap. A6

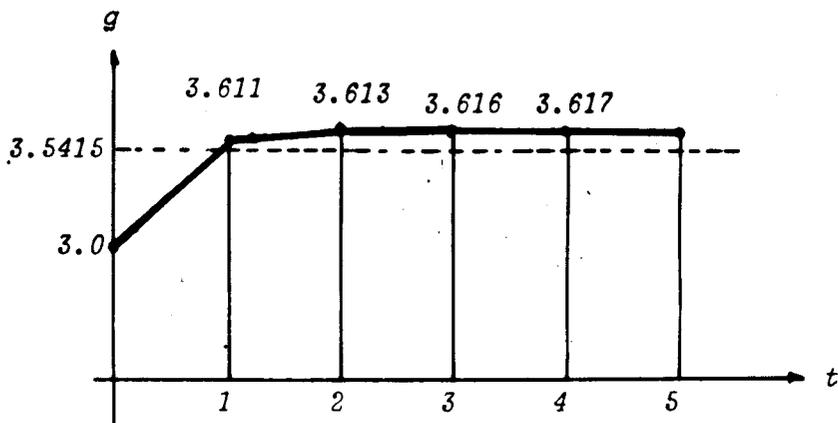


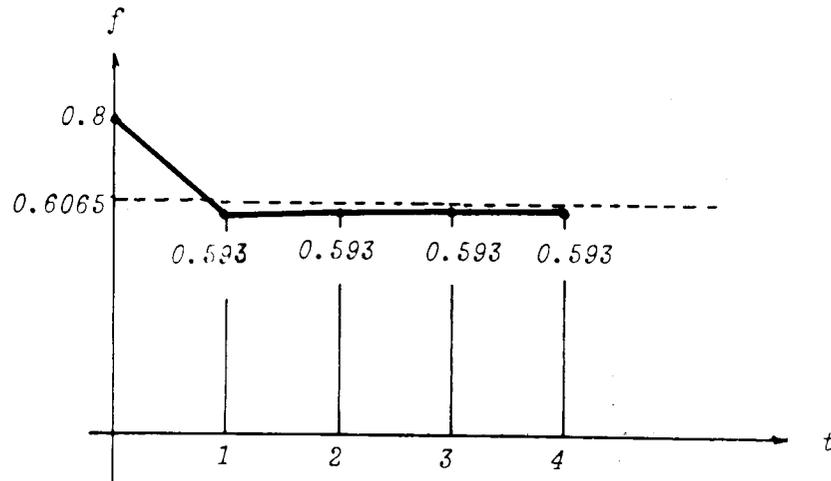
$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= 0.1 \\ \sigma_{\xi}^2 &= 0.1 \\ \sigma_o^2 &= 0.1 \\ \Delta &= 0.001 \end{aligned}$$



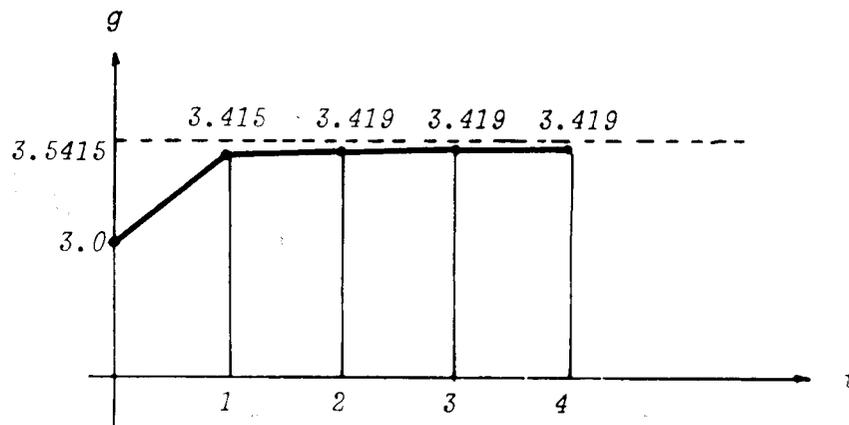


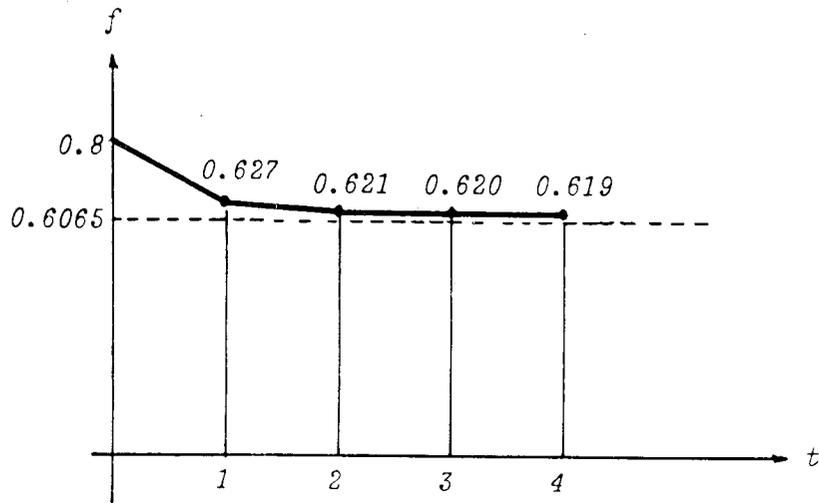
$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= 0.1 \\ \sigma_t^2 &= 0.5 \\ \sigma_o^2 &= 0.1 \\ \Delta &= 0.001 \end{aligned}$$



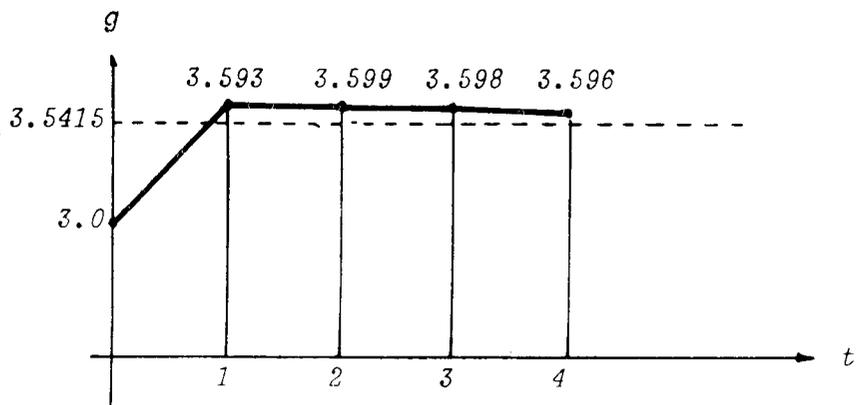


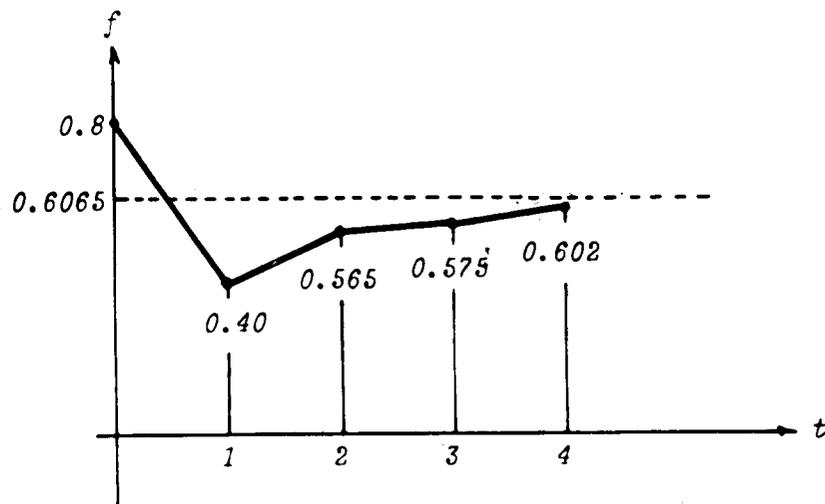
$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= 0.5 \\ \sigma_{\zeta}^2 &= 0.1 \\ \sigma_{\omega}^2 &= 0.1 \\ \Delta &= 0.001 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= 0.1 \\ \sigma_{\zeta}^2 &= 0.5 \\ \sigma_{\omega}^2 &= 0.1 \\ \Delta &= 0.0001 \end{aligned}$$



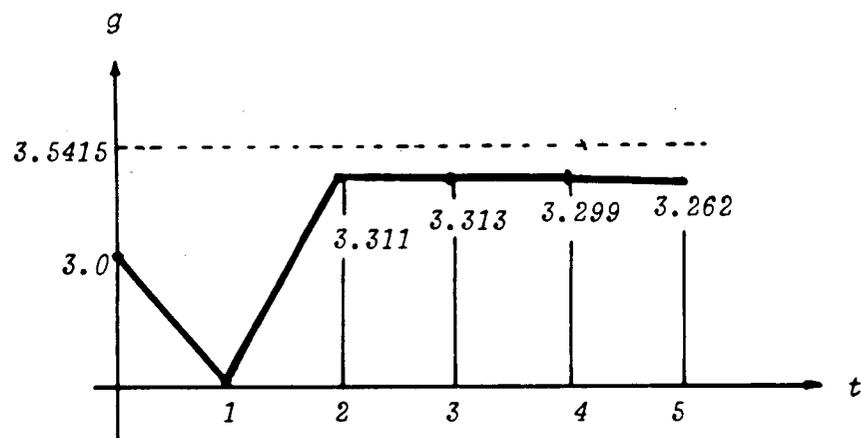


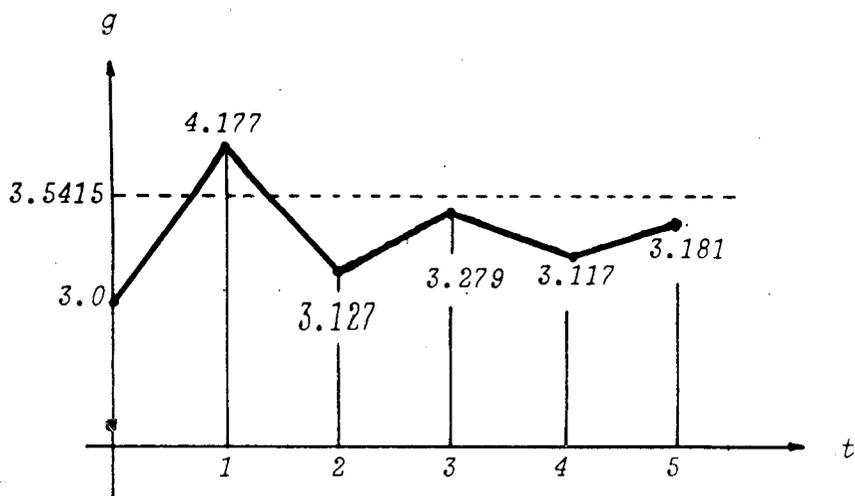
$$\sigma_{\xi}^2 = 0.1$$

$$\sigma_{\eta}^2 = 0.1$$

$$\sigma_{\theta}^2 = 0.1$$

$$\Delta = 0.0001$$



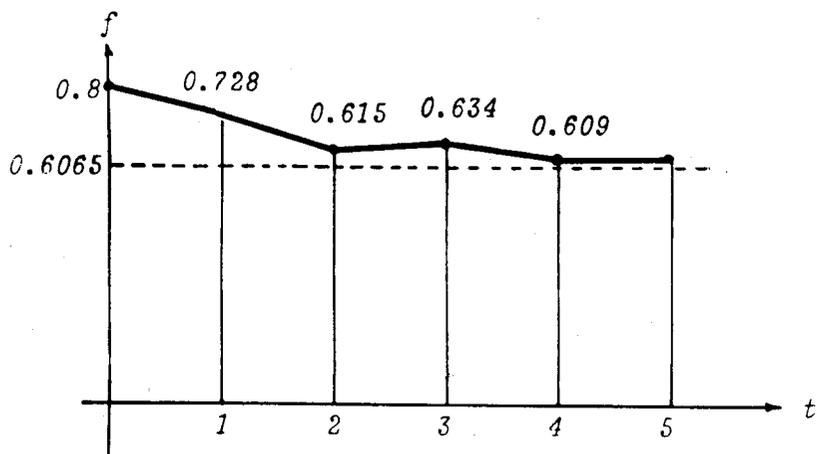


$$\sigma_{\xi}^2 = 0.1$$

$$\sigma_{\zeta}^2 = 0.1$$

$$\sigma_{\omega}^2 = 0.1$$

$$\Delta = 0.0001$$



Σ_c	0,68	0,69	0,69	0,69
Σ_a	1,15	1,20	1,20	1,20

C1

$$\hat{Q} = 0,6 \quad \hat{R} = 0,4$$

Σ_c	0,98	1,00	1,00	1,00
Σ_a	1,15	1,22	1,22	1,22

C6

$$\hat{Q} = 0,9 \quad \hat{R} = 0,4$$

Σ_c	1,43	1,57	1,58	1,58
Σ_a	1,12	1,19	1,20	1,20

C2

$$\hat{Q} = 1,3 \quad \hat{R} = 1,5$$

Σ_c	1,24	1,35	1,37	1,37
Σ_a	1,13	1,20	1,21	1,21

C7

$$\hat{Q} = 1,1 \quad \hat{R} = 1,6$$

Σ_c	0,13	0,12	0,12	0,12
Σ_a	1,26	1,20	1,20	1,20

C3

$$\hat{Q} = 0,1 \quad \hat{R} = 0,1$$

Σ_c	1,73	1,84	1,85	1,85
Σ_a	1,12	1,20	1,20	1,20

C8

$$\hat{Q} = 1,6 \quad \hat{R} = 1,1$$

Σ_c	1,03	1,03	1,03	1,03
Σ_a	1,26	1,31	1,31	1,31

C4

$$\hat{Q} = 1 \quad \hat{R} = 0,1$$

Σ_c	0,59	0,60	0,60	0,60
Σ_a	1,14	1,19	1,20	1,20

C9

$$\hat{Q} = 0,5 \quad \hat{R} = 0,5$$

Σ_c	0,22	0,17	0,15	0,14
Σ_a	1,22	1,28	1,35	1,38

C5

$$\hat{Q} = 0,1 \quad \hat{R} = 1$$

Σ_c	0,52	0,52	0,52	0,52
Σ_a	1,12	1,21	1,22	1,22

C10

$$\hat{Q} = 0,4 \quad \hat{R} = 0,9$$

Σ_c	0,74	0,74	0,74	0,74
Σ_a	1,16	1,20	1,20	1,20

C11

$$\Sigma^0 = 0,5 \quad \Sigma^1 = 0,65 \quad \hat{Q} = 0,65 \quad \hat{R} = 0,4$$

Σ_c	0,69	0,69	0,69	0,69
Σ_a	1,18	1,20	1,20	1,20

C16

$$\Sigma^0 = 0,5 \quad \Sigma^1 = 0,8 \quad \hat{Q} = 0,6 \quad \hat{R} = 0,4$$

Σ_c	0,92	0,94	0,94	0,94
Σ_a	1,13	1,19	1,20	1,20

C12

$$\Sigma^0 = 0,5 \quad \Sigma^1 = 0,65 \quad \hat{Q} = 0,8 \quad \hat{R} = 0,7$$

Σ_c	0,64	0,69	0,69	0,69
Σ_a	1,12	1,20	1,20	1,20

C17

$$\Sigma^0 = 0,5 \quad \Sigma^1 = 0,2 \quad \hat{Q} = 0,6 \quad \hat{R} = 0,4$$

Σ_c	1,49	1,57	1,58	1,58
Σ_a	1,12	1,19	1,20	1,20

C13

$$\Sigma^0 = 0,5 \quad \Sigma^1 = 0,8 \quad \hat{Q} = 1,3 \quad \hat{R} = 1,5$$

Σ_c	1,36	1,56	1,58	1,58
Σ_a	1,14	1,19	1,20	1,20

C18

$$\Sigma^0 = 0,5 \quad \Sigma^1 = 0,2 \quad \hat{Q} = 1,3 \quad \hat{R} = 1,5$$

Σ_c	1,16	1,19	1,20	1,20
Σ_a	1,12	1,19	1,20	1,20

C14

$$\Sigma^0 = 0,5 \quad \Sigma^1 = 0,8 \quad \hat{Q} = 1 \quad \hat{R} = 1$$

Σ_c	1,06	1,18	1,19	1,20
Σ_a	1,13	1,19	1,20	1,20

C15

$$\Sigma^0 = 0,5 \quad \Sigma^1 = 0,2 \quad \hat{Q} = 1 \quad \hat{R} = 1$$

BIBLIOGRAFIA

-
- [1] R. J. H. BEVERTON & S. H. HOLT. *On the dynamics of exploited fish populations*. Fish. Invest. London (Ser. 2) 19 (1957) 533 p.
- [2] W. E. RICKER. *Handbook of computations for biological statistic of fish populations*. Fish. Res. Board Can., Bull. 119 (1958) 300 p.
- [3] M. B. SCHAEFER. *Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries*. Bull. Inter-Amer. Trop. Tuna Comm. 1 (1954) 27-56.
- [4] — *A study of the dynamics of the fishery for yellowfin tuna in the eastern tropical Pacific Ocean*. Bull. Inter-Amer. Trop. Tuna Comm. 2 (1957) 245-285.
- [5] J. J. PELLA & P. K. TOMLINSON. *A generalized stock production model*. Bull. Inter-Amer. Trop. Tuna Comm. 13 (1969) 421-496.
- [6] W. W. FOX. *An exponential yield model for optimizing exploited fish populations*. Trans. Amer. Fish. Soc. 99 (1970) 80-88.
- [7] L. M. DICKIE. *Effects of fishing regulation on the catch of fish*. Economic Effects of Fishing Regulations. FAO Fish. Rep. 5 (1962) 102-133.
- [8] M. B. SCHAEFER & R. J. H. BEVERTON. *Fishery dynamics - their analysis and interpretation*. The Sea, M. N. Hill (ed.), Interscience, N. Y. (1963).
- [9] J. A. GULLAND. *Manual of methods of fish population analysis*. FAO Fish. Tech. Paper N° 40, (Flb/T40). (1964).
- [10] M. B. SCHAEFER. *Methods of estimating effects of fishing on fish populations*. Trans. Amer. Fish. Soc. 97 (1968) 231-241.
- [11] G. G. WALTER. *Delay-differential equation models for fisheries*. J. Fish. Res. Board Can. 30 (1973) 939-945.
- [12] J. SCHNUTE. *Improved estimates from the Schaefer production model: theoretical consideration*. J. Fish. Res. Board Can. 34 (1977) 583-603.
- [13] C. J. WALTERS & R. HILBORN. *Adaptive control of fishing systems*. J. Fish. Res. Board Can., 33 (1976) 145-159.
- [14] Y. BAR-SHALOM. *Optimal simultaneous state estimation and parameter identification in linear discrete-time systems*. Trans. IEEE AC-17 (1972) 308-319.
- [15] R. E. KALMAN. *New methods in Wiener filtering theory*. Proc. First Symposium on Engineering Appl. of random function theory and probability, (1963).
- [16] H. HEFFES. *The effect of erroneous models on the Kalman filter response*. Trans. IEEE AC-11 (1966) 541-543.
- [17] R. K. MEHRA. *On the identification of variances and adaptive Kalman filtering*. Trans. IEEE AC-15 (1970) 175-184.
- [18] T. KAILATH. *An innovation approach to least-squares estimation*. Trans. IEEE AC-13 (1968) 646-655.
- [19] M. S. BARTLETT. *An introduction to Stochastic Processes*, Cambridge Univ. Press. (1962).
- [20] A. PAPOULIS. *Estimation of the average density of a non uniform Poisson process*. Trans. IEEE Commun., 22 (1974) 162-167.
- [21] G. G. WALTER. *Graphical methods for estimating parameters in simple models fisheries*. J. Fish. Res. Board Can., 32 (1975) 2163-2168.
- [22] R. E. KALMAN. *Contributions to the theory of optimal control*. Bol. Soc. Mat. Mexicana, 5 (1960) 102-119.
-